我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

< 2022年3月 >

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

搜索

找找看
谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

概率统计16——均匀分布、先验与后验

相关阅读：

最大似然估计(概率10)

重要公式（概率4）

概率统计13——二项分布与多项分布

贝叶斯决策理论（1）基础知识 | 数据来自于一个不完全清楚的过程.....

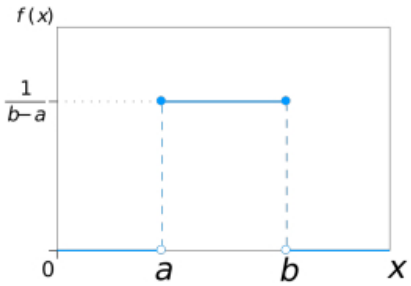
均匀分布

简单来说，均匀分布是指事件的结果是等可能的。掷骰子的结果就是一个典型的均匀分布，每次的结果是6个离散型数据，它们的发生是等可能的，都是1/6。均匀分布也包括连续形态，比如一份外卖的配送时间是10~20分钟，如果我点了一份外卖，那么配送员会在接单后的10~20分钟内的任意时间送到，每个时间点送到的概率都是等可能的。

很多时候，均匀分布是源于我们对事件的无知，比如面对中途踏上公交车的陌生人，我们会判断他在之后任意一站下车的可能性均相等。正是由于不认识这个人，也不知道他的目的地是哪里，因此只好认为在每一站下车的概率是等可能的。如果上车的是一个孕妇，并且接下来公交车会经过医院，那么她很可能是去医院做检查，她在医院附近下车的概率会远大于其他地方。虽然不认识这名孕妇，但孕妇的属性为我们提供了额外的信息，让我们稍稍变的“有知”，从而打破了分布的均匀性。

根据“均匀”的概念，如果随机变量X在[a, b]区间内服从均匀分布，则它的密度函数是：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$



这里的区间是(a,b)还是[a,b]没什么太大关系。

均匀分布记作X~U(a, b)，当a ≤ x ≤ b时，分布函数是：

$$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{x-a}{b-a}$$

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

由此可知X~U(a, b)在随机变量是任意取值时的分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

假设某个外卖配送员送单的速度在10~15分钟之间，那么这个配送员接单后在13分钟之内送到的概率是多少？

我们同样对这名配送员缺乏了解，也不知道他的具体行进路线，因此认为他在10~15分钟之间送到的概率是等可能的，每个时间点送到的概率都是dx/(15-10)，因此在13分钟内送到的概率是：

$$P(10\le x\le 13)=\int_{10}^{13}\frac{1}{15-10}\mathrm{d}x=\frac{x}{15-10}\Big|_{10}^{13}=0.6$$

其实也没必要每次都用积分，直接用概率分布的公式就可以了：

$$P(10\le x\le 13)=\frac{13-10}{15-10}=0.6$$

先验与后验

某个城市有10万人，其中有一个是机器人伪装的。现在有关部门提供了一台检测仪，当检测仪认为被检测对象是机器人时就会发出刺耳的警报。但这台检测仪并不完美，仍有1%的错误率，也就是说有1%的概率把一个正常人判断成机器人，也有1%的概率把机器人误判为正常人。对于全城的任何一个居民来说，如果检测仪将他判断为机器人，那么他真是机器人的概率是多大？

我们用随机变量θ表示一个居民的真实身份，X表示检测结果（有警报和正常两种结果），上面的问题可以用以下概率表示：

$$P(\theta=\text{机器人})=\frac{1}{100000},\qquad P(\theta=\text{人类})=\frac{99999}{100000}$$

$$P(X=\text{警报}|\theta=\text{人类})=\frac{1}{100},\qquad P(X=\text{正常}|\theta=\text{人类})=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

$$P(X=\text{正常}|\theta=\text{机器人})=\frac{1}{100},\qquad P(X=\text{报警}|\theta=\text{机器人})=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

$$P(\theta=\text{机器人}|X=\text{警报})=?$$

我们根据上面的式子来解释先验概率和后验概率。

先验概率（prior probability），是指根据以往经验和分析得到的概率，与试验结果无关。这里的“以往经验”可能是一批历史数据的统计，也可能是主观的预估。值得注意的是，主观预估绝非瞎猜，实际上主观预估也是一种不精确的统计分析。比如我们估计一个外卖配送员的交通工具是电瓶车，虽然是一个主观的猜测，但准确率相当高，毕竟在方圆五公里之内，电瓶车是最灵活快捷的交通工具。上面的P(θ=机器人)是一个先验概率，它是事先知道的，不管有没有检测仪，检测结果怎么样，我们都事先认定这个城市中有一个机器人伪装成人类的概率是10万分之一，至于是怎么知道的就是另外一回事了，可能是接到群众的举报，也可能是有关部门提供的消息。

10万人中有一个是机器人伪装的，先验概率是P(θ= 机器人) = 1/100000。是否有可能有另一个先验概率，比如10万人中有1/100是机器

人伪装的？当然可以。按照这个逻辑，先验概率可以是0~1之间的任何数值。

这里的参数θ代表居民的身份，有两个取值，机器人和人类，P(θ)表示θ是某个取值的概率，既然是概率，那么θ也必然服从某个分布，这个分布就称为先验分布。

简单而言，先验概率是对随机变量θ的取值的预估，先验分布是关于先验概率的概率分布（即P(θ)中θ取值的分布）。如果θ的取值是连续型的，它的先验分布就是连续型分布。

后验概率（posterior probability），是在相关结果或者背景给定并纳入考虑之后的条件概率。比如一个熊孩子持续三分钟没有动静，以此为前提，这个熊孩子在“干大事”的概率就是一个后验分布，表示为P(干大事|三分钟没动静)。对P(θ=机器人|X=警报)来说，检测结果已经有了，是X=警报，在此基础上求接受检测的居民是否真是机器人的概率，因此这是一个后验概率。

似然函数（likelihood function）用来描述已知随机变量输出结果时，未知参数的可能取值。关于似然的概念前面已经详细介绍过，可参考 最大似然估计(概率10)。

最后看看问题的答案。贝叶斯公式告诉我们：

$$后验 = \frac{先验 \times 似然}{证据}$$

$$P(\theta = 机器人 | X = 警报) = \frac{P(\theta = 机器人)P(X = 警报 | \theta = 机器人)}{P(X = 警报)}$$

$$P(X = 警报)$$

$$= P(\theta = 机器人, X = 警报) + P(\theta = 人类, X = 警报)$$

$$= P(X = 警报 | \theta = 机器人)P(\theta = 机器人) + P(X = 警报 | \theta = 人类)P(\theta = 人类)$$

$$= \frac{99}{100} \times \frac{1}{100000} + \frac{1}{100} \times \frac{99999}{100000}$$

$$\approx 0.1\%$$

校正先验

假设有两枚硬币C_1和C_2，它们投出正面的概率分别是0.6和0.3。现在取其中一枚连投10次，得到的结果是前5次正面朝上，后5次反面朝上，试验中选择的最可能是哪枚硬币？

我们把参数θ看成硬币的选择，只有两枚硬币，也许在现实中它们长的不一样，大多数人会选择更漂亮的C_1，但是在题目中，实验前我们对两枚硬币都缺乏了解，基于“无知”的原则，认为选择C_1和C_2的概率是等可能

的，即P(θ=C_1)= P(θ=C_2)=0.5。有了先验概率后，可以代入贝叶斯公式计算后验概率：

$$P(\theta = C_1|data) = \frac{P(\theta = C_1)P(data|\theta = C_1)}{P(data)}$$

这里data是10次投硬币的结果，无论选择那枚硬币，投掷的结果都符合伯努利分布：

$$P(data|\theta = C_1) = 0.6^5(1-0.6)^{10-5} \approx 0.0008$$

$$P(data|\theta = C_2) = 0.3^5(1-0.3)^{10-5} \approx 0.0004$$

P(data)则需要借助全概率公式：

$$\begin{aligned} P(data) &= P(data, \theta = C_1) + P(data, \theta = C_2) \\ &= P(data|\theta = C_1)P(\theta = C_1) + P(data|\theta = C_2)P(\theta = C_2) \\ &= 0.0008 \times 0.5 + 0.0004 \times 0.5 \\ &= 0.0006 \end{aligned}$$

现在可以分别计算实验前选择C_1硬币或C_2硬币的概率：

$$P(\theta = C_1|data) = \frac{P(\theta = C_1)P(data|\theta = C_1)}{P(data)} = \frac{0.5 \times 0.0008}{0.0006} \approx 0.6667$$

$$P(\theta = C_2|data) = \frac{P(\theta = C_2)P(data|\theta = C_2)}{P(data)} = \frac{0.5 \times 0.0004}{0.0006} \approx 0.3333$$

这个数字符合直觉。对于分类来说，在比较C_1和C_2的后验概率时，二者的分母都是P(data)，也就是说P(data)并没有起到实际作用，因此对于分类器来说无需计算P(data)：

$$\text{可能的选择} = \begin{cases} C_1, & P(\theta = C_1)P(data|\theta = C_1) > P(\theta = C_2)P(data|\theta = C_2) \\ C_2, & \text{else} \end{cases}$$

贝叶斯公式告诉我们，先验概率是在实验前对原因的预估，后验概率是在试验后根据结果反推原因，或者说是根据结果对最初预估的修正。既然如此，一次修正得到的并不一定是最佳结果，可以尝试多次修正，前一个样本点的后验会被下一次估计当作先验。我们根据这种思路重新计算一下C_1的后验概率。

一共抛了10次硬币，用{x_1, x_2, ..., x_{10}}代表每次抛硬币的结果，x_1~x_5是正面，x_6~x_{10}是反面，仍然在实验前认为选择C_1和C_2的概率是等可能的，下面是已知信息：

$$P(\text{正}|C_1) = 0.6, \quad P(\text{反}|C_1) = 0.4, \quad P(\text{正}|C_2) = 0.3, \quad P(\text{反}|C_2) = 0.7$$

$$P(C_1) = 0.5, \quad P(C_2) = 0.5$$

与之前不同，这次我们每次只看一枚硬币，以此来计算θ的后验概率：

$$P(x_1|C_1) = \frac{P(C_1)P(x_1|C_1)}{P(x_1)} = \frac{P(C_1)P(x_1|C_1)}{P(x_1|C_1)P(C_1) + P(x_1|C_2)P(C_2)} = \frac{0.5 \times 0.6}{0.6 \times 0.5 + 0.3 \times 0.5} = \frac{2}{3}$$

$$P(x_1|C_2) = 1 - P(x_1|C_1) = \frac{1}{3}$$

后验信息代表一次历史经验，比试验前的“无知”稍强一些。接下来，我们用后验概率作为下一次迭代的先验概率：

$$P(C_1)=\frac{2}{3},\quad P(C_2)=\frac{1}{3}$$

$$P(x_2|C_1)=\frac{P(C_1)P(x_2|C_1)}{P(x_2)}=\frac{P(C_1)P(x_2|C_1)}{P(x_2|C_1)P(C_1)+P(x_2|C_2)P(C_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times 0.6}{0.6\times\frac{2}{3}+0.3\times\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}$$

$$P(x_2|C_2)=1-P(x_2|C_1)=\frac{1}{5}$$

继续迭代，直到x_{10}为止，将最终得到的先验概率就是最终结果。

```
p_1_c1, p_0_c1 = 0.6, 0.4  # P(1|c1) = 0.6, P(0|c1) = 0.4, 1和0分别代表
p_1_c2, p_0_c2 = 0.3, 0.7  # P(1|c2) = 0.3, P(0|c2) = 0.7


def posterior_theta(p_c1, p_c2, x):
    '''
    计算θ的后验概率
    :param p_c1: c1的先验概率P(C1)
    :param p_c2: c2的先验概率P(C2)
    :param x: 硬币的结果
    :return: 后验概率P(C1|x)和P(C2|x)
    '''
    p_x_c1 = p_1_c1 if x == 1 else p_0_c1
    p_x_c2 = p_1_c2 if x == 1 else p_0_c2
    # 计算后验概率P(C1|x)
    p_c1_x = p_c1 * p_x_c1 / (p_x_c1 * p_c1 + p_x_c2 * p_c2)
    p_c2_x = 1 - p_c1_x
    return p_c1_x, p_c2_x


data = [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]  # 5正5反
p_c1, p_c2 = 0.5, 0.5  # 初始先验P(C1) = P(C2) = 0.5
for x in data:
    # 用后验作为下一个样本点的先验
    p_c1, p_c2 = posterior_theta(p_c1, p_c2, x)
    print('P(C1)={0}, P(C2)={1}'.format(p_c1, p_c2))
```

P(C1)=0.6666666666666667, P(C2)=0.33333333333333326

P(C1)=0.8, P(C2)=0.19999999999999996

P(C1)=0.888888888888889, P(C2)=0.11111111111111105

P(C1)=0.9411764705882353, P(C2)=0.05882352941176472

P(C1)=0.9696969696969696, P(C2)=0.030303030303030387

P(C1)=0.948148148148148, P(C2)=0.05185185185185204

P(C1)=0.9126559714795006, P(C2)=0.08734402852049938

P(C1)=0.8565453785027182, P(C2)=0.14345462149728183

P(C1)=0.7733408854904177, P(C2)=0.22665911450958232

P(C1)=0.6609783156833076, P(C2)=0.33902168431669244

上面的迭代过程是一个将样本点逐步增加到学习器的过程，前一个样本点的后验会被下一次估计当作先验。可以说，贝叶斯学习是在逐步地更新先验，逐步通过新样本对原有的分布进行修正。

在实际应用中当然不会每次仅仅增加一个样本点。下面的例子更好地说明了这个逐步更新先验的过程。

为了提高产品的质量，公司经理考虑增加投资来改进生产设备，预计投资90万元，但从投资效果来看，两个顾问给出了不同的预言：

θ_1顾问：改进生产设备后，高质量产品可占90%

θ_2顾问：改进生产设备后，高质量产品可占70%

根据经理的以往经验，两个顾问的靠谱率是$P(\theta_1)=0.4$, $P(\theta_2)=0.6$。这两个概率是先验概率，是经理的主观判断。似乎θ_2更靠谱一些，但是这次，θ_2顾问意见太保守了，为了得到更准确的信息，经理进行了小规模的试验，结果第一批制作的5个产品全是令人兴奋的高质量产品。

用D_1表示本次实验的5个产品，可以得到下面的结论：

$$P(D_1|\theta_1) = 0.9^5 \approx 0.590$$

$$P(D_1|\theta_2) = 0.7^5 \approx 0.168$$

$$P(D_1) = P(D_1|\theta_1)P(\theta_1) + P(D_1|\theta_2)P(\theta_2) = 0.590 \times 0.4 + 0.168 \times 0.6 \approx 0.337$$

$$P(\theta_1|D_1) = \frac{P(\theta_1)P(D_1|\theta_1)}{P(D_1)} = \frac{0.4 \times 0.590}{0.337} \approx 0.700$$

$$P(\theta_2|D_1) = \frac{P(\theta_2)P(D_1|\theta_2)}{P(D_1)} = \frac{0.6 \times 0.168}{0.337} \approx 0.300$$

在第一次试验后，经理针对本次实验对两个顾问的靠谱率做出了修正，认为$P(\theta_1)=0.700$, $P(\theta_2)=0.300$，这个概率更符合本次实验的结果，或者说试验结果改变了经理的主观看法。

当然5个产品说明不了太大问题，于是经理又试制了10个产品（用D_2表示），结果有9个是高质量的，根据这个结果继续对顾问的靠谱率进行修正：

$$P(\theta_1) = 0.700$$

$$P(\theta_2) = 0.300$$

$$P(D_2|\theta_1) = C_{10}^9 \times 0.9^9 \times (1-0.9) \approx 0.387 \qquad (0.9 \text{ 是} \theta_1 \text{对高质量产品占比的预言})$$

$$P(D_2|\theta_2) = C_{10}^9 \times 0.7^9 \times (1-0.7) \approx 0.121 \qquad (0.7 \text{ 是} \theta_2 \text{对高质量产品占比的预言})$$

$$P(D_2) = P(D_2|\theta_1)P(\theta_1) + P(D_2|\theta_2)P(\theta_2) = 0.387 \times 0.700 + 0.121 \times 0.300 \approx 0.307$$

$$P(\theta_1|D_2) = \frac{P(\theta_1)P(D_2|\theta_1)}{P(D_2)} = \frac{0.700 \times 0.387}{0.307} \approx 0.882$$

$$P(\theta_2|D_2) = \frac{P(\theta_2)P(D_2|\theta_2)}{P(D_2)} = \frac{0.300 \times 0.121}{0.307} \approx 0.118$$

两个顾问的靠谱率在D_2中再次得到修正。

出处：微信公众号 "我是8位的"

随笔

分类: 概率

标签: 后验概率, 均匀分布, 先验概率

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
+加关注

« 上一篇： 概率统计15——泊松分布
» 下一篇： 概率统计17——点估计和连续性修正

posted on 2020-02-03 16:56 我是8位的 阅读(3238) 评论(0) 编辑 收藏 举报